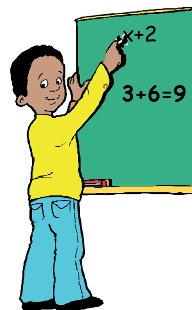
Núcleo Temático 2

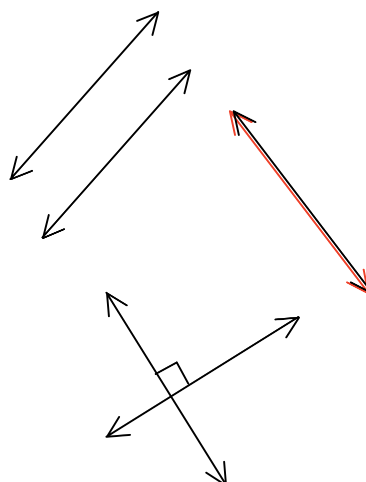




RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

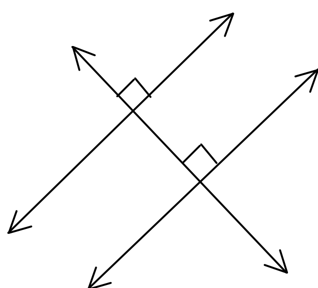


En un plano, las rectas que son coincidentes o que no tienen ningún punto en común se llaman **paralelas**.



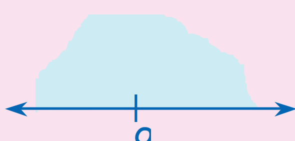
En un plano, las rectas que al cortarse forman cuatro ángulos de igual medida se llaman **perpendiculares**.

Cada uno de esos ángulos se llama ángulo recto y mide 90°

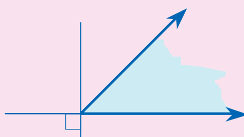


En un plano, dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.

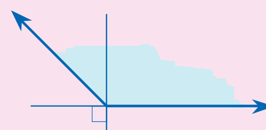
Se llama **ángulo llano** al ángulo determinado por dos semirrectas opuestas.



Se llama **ángulo agudo** a todo ángulo menor que un recto.

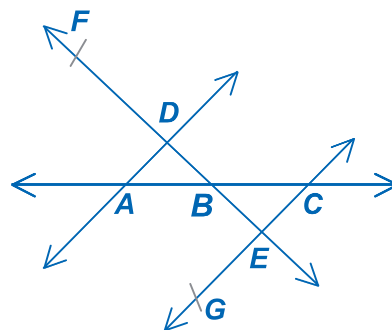


Se llama **ángulo obtuso** a todo ángulo mayor que un recto y menor que un llano.



Con $|\hat{ADF}|$ representamos la medida del ángulo $\hat{ADF}$.

En la figura $|\hat{ADF}| = |\hat{ADB}| = |\hat{BEC}| = |\hat{BEG}| = 90°$:

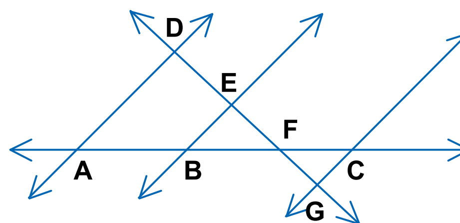


- *las rectas **GC** y **EF** son perpendiculares, pues el ángulo **ADF** es recto.*
- *las rectas **AD y GC** son paralelas.*
- *el ángulo* $\hat{ABD}$ *es agudo.*
- *el ángulo* $\hat{ABE}$ *es obtuso.*
- *el ángulo* $\hat{FDE}$ *es llano.*

◈ ***Para que lo intentes solo...***

1. En la figura

$|G\hat{E}B| = |B\hat{E}D| = |E\hat{G}C| = |A\hat{D}E| = 90^\circ$

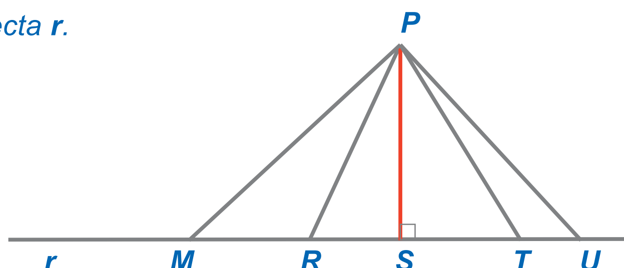


Nombrá:

a) dos rectas paralelas.
b) dos rectas perpendiculares.
c) un ángulo recto.
d) un ángulo agudo.
e) un ángulo obtuso.
f) un ángulo llano.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Los segmentos $\overline{PM}, \overline{PR}, \overline{PS}, \overline{PT}$ *y* $\overline{PU}$ *tienen un extremo en* ***P*** *y el otro extremo sobre la recta* ***r****.*

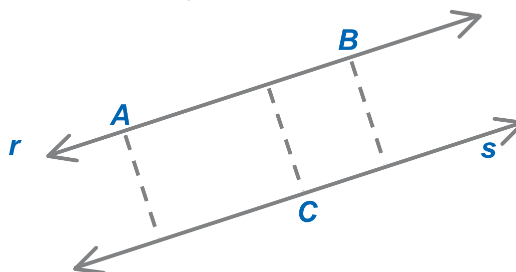


Observamos que de todos los segmentos anteriores el segmento $\overline{PS}$ *, que es perpendicular a la recta, es el de menor longitud.*

> La longitud del segmento $\overline{PS}$ es la **distancia** del punto *P* a la recta *r*.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Consideremos dos rectas paralelas ***r*** *y* ***s****:*



Si elegimos dos puntos cualesquiera sobre ***r****, por ejemplo los puntos* ***A*** *y* ***B****, la distancia de estos puntos a la recta* ***s*** *es la misma.*

Si ahora elegimos un punto sobre la recta ***s****, por ejemplo el* ***C****, la distancia de* ***C*** *a la recta* ***r*** *es la misma que la de* ***A*** *o* ***B*** *a la recta* ***s****.*

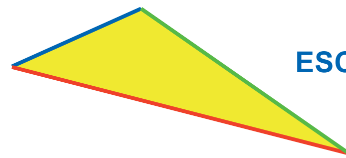
Esta medida es la ***distancia entre las rectas.***



La **distancia** entre dos **rectas paralelas** es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta.

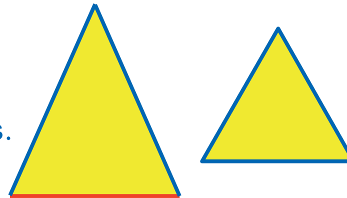
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

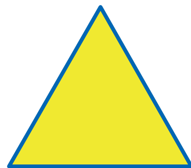
Dos figuras son **congruentes** si al superponerlas coinciden.



ESCALENO: tiene sus tres lados **no** congruentes.

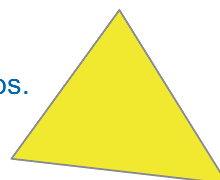
ISÓSCELES: tiene dos de sus lados congruentes.

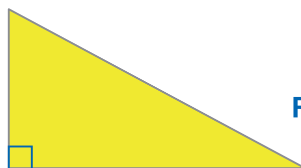




EQUILÁTERO: tiene sus tres lados congruentes.

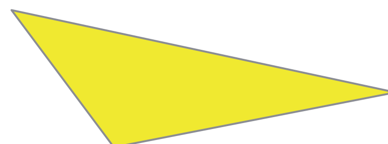
ACUTÁNGULO: tiene sus tres ángulos agudos.





RECTÁNGULO: tiene un ángulo recto.

OBTUSÁNGULO: tiene un ángulo obtuso.



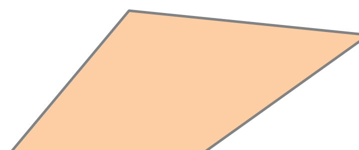
Para que lo intentes solo...

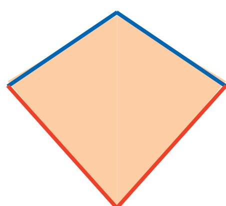
2. Marcá con una X en el casillero correspondiente:

	SIEMPRE	A VECES	NUNCA
Un triángulo equilátero es isósceles.			
Un triángulo isósceles es equilátero.			
Un triángulo escaleno es isósceles.			
Un triángulo rectángulo es isósceles.			
Un triángulo isósceles es rectángulo.			
Un triángulo escaleno es rectángulo.			
Un triángulo equilátero es rectángulo.			
Un triángulo isósceles tiene dos ángulos congruentes.			

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

TRAPEZOIDE: no tiene lados paralelos.



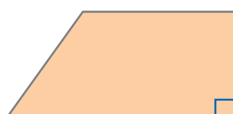


ROMBOIDE:
tiene un par de lados consecutivos congruentes, distintos de los otros dos lados, también congruentes.

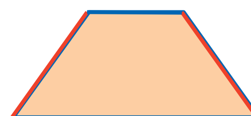
TRAPECIO: tiene un sólo par de lados paralelos.



.



TRAPECIO RECTÁNGULO:
tiene un ángulo recto.



TRAPECIO ISÓSCELES:
los lados no paralelos son congruentes.

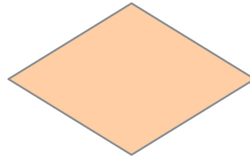


PARALELOGRAMO: tiene los lados opuestos paralelos.

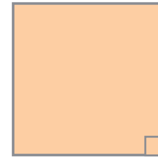




RECTÁNGULO:
tiene los cuatro ángulos rectos.



ROMBO:
tiene los cuatro lados congruentes.



CUADRADO;
tiene los cuatro lados y los cuatro ángulos congruentes.

Para que lo intentes solo...

3. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).
Marcá con una X en el casillero correspondiente.

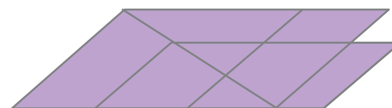
	V	F
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.		
Todo paralelogramo es un rectángulo.		
Todo rectángulo es un paralelogramo.		
Todo rombo es un cuadrado.		
Todo cuadrado es un rombo.		
Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes		
Todo trapecio tiene los lados no paralelos congruentes.		
Todo romboide tiene un par de ángulos opuestos congruentes.		
Todo romboide tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes.		
Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.		

4.

a) ¿Cuántos paralelogramos hay en la figura?

b) ¿Cuántos triángulos?

c) ¿Cuántos trapecios?



Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.
Las diagonales de un rectángulo son congruentes y se cortan en su punto medio.
Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio y son perpendiculares.
Las diagonales de un cuadrado se cortan en su punto medio, son congruentes y perpendiculares.
Las diagonales de un romboide son perpendiculares.

COPIA Y CONSTRUCCION DE FIGURAS

Para las siguientes actividades usaremos regla no graduada, compás y escuadra.

Margarita, Tobías y Mateo idearon distintivos para el equipo de gimnasia deportiva.

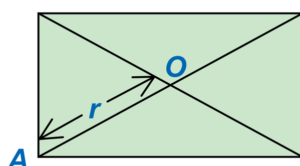
Margarita les da a sus amigos una hoja lisa con un rectángulo verde y las siguientes instrucciones para que dibujen el distintivo que ella pensó:

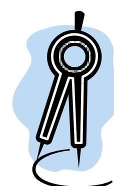
- tracen las diagonales del rectángulo.
- llamen ***O*** al punto donde se cortan
- llamen ***A*** a uno de sus vértices.
- dibujen todos los puntos que están a la misma distancia de **O** que el punto ***A****.*
- píntenlos de violeta.



► ¿Cómo se puede dibujar el distintivo que ideó Margarita utilizando sólo compás y regla no graduada?

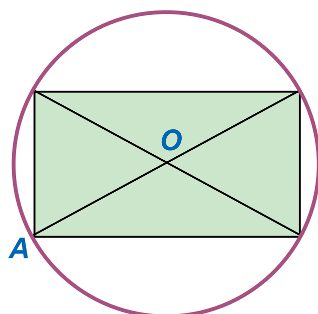
*Trazamos las diagonales del rectángulo y llamamos **O** a su punto de intersección. Elegimos un vértice cualquiera del rectángulo lo llamamos **A**. Luego a la medida del segmento **OA** la llamamos **r**.*



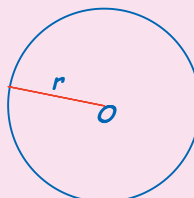


*Como las diagonales del rectángulo son congruentes y se cortan en su punto medio, para dibujar todos los puntos cuya distancia a **O** es igual a la medida del segmento **OA**, debemos construir la circunferencia de centro **O** y radio **r**.*

.



La **circunferencia** de **centro *O*** y **radio *r*** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al punto ***O*** es igual a ***r***.



Ahora es el turno de Mateo. Las instrucciones que da a sus amigos son las siguientes:

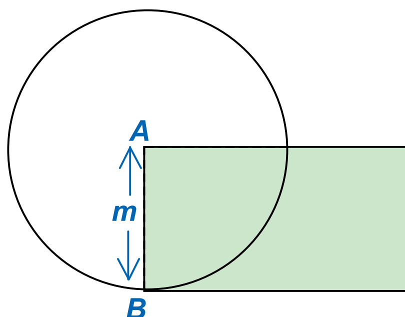
- elijan los extremos de uno de los lados menores del rectángulo.
- llamen ***A*** y ***B*** a esos extremos.
- llaman ***m*** a la medida del lado ***AB***.
- dibujen todos los puntos que estén a una distancia de ***A*** menor o igual que ***m*** y píntenlos de azul.

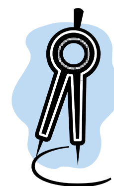
► ¿Cómo se puede dibujar el distintivo ideado por Mateo?

*Elegimos uno de los lados menores del rectángulo y llamamos **A** y **B** a sus extremos:*



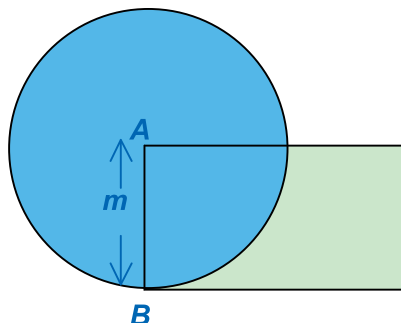
*Teniendo en cuenta lo realizado para diseñar el distintivo de Margarita trazamos una circunferencia de centro **A** y radio **m** =* $|\overline{AB}|$ *y así dibujamos todos los puntos que están de **A** a una distancia **m**.*



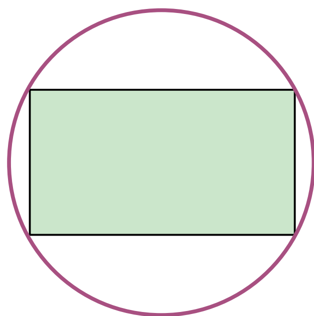


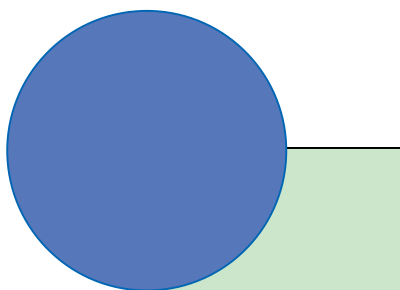
*Como en las instrucciones se piden todos los puntos que están a una distancia de **A** menor o igual que **m**, pintamos de azul la circunferencia y sus puntos interiores. Luego queda dibujado el círculo de centro **A** y radio **m**.*



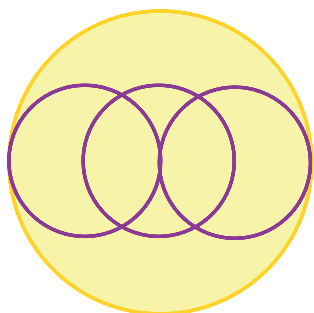


Para finalizar la construcción de los distintivos los chicos borraron las letras y construcciones auxiliares obteniendo los siguientes dibujos:

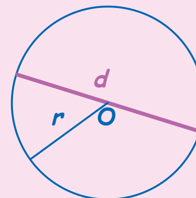




Tobías sólo quiere utilizar círculos y circunferencias para su distintivo. En una hoja lisa, hizo el siguiente dibujo y pidió a sus amigos que lo copien usando sólo compás y regla no graduada.

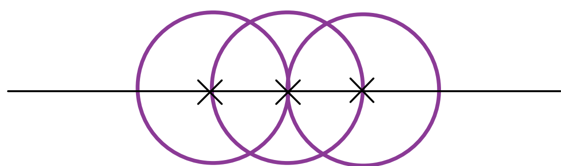


Recordá que:
Todo segmento que tenga sus extremos en un circunferencia y pase por el centro es un **diámetro de dicha circunferencia**.



► ¿Cómo se puede copiar el distintivo dibujado por Tobías?

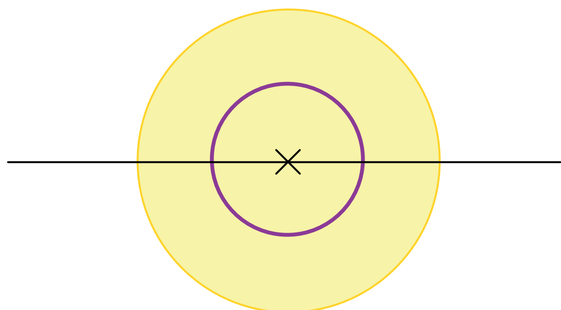
Una posible manera de copiar el distintivo de Tobías es trazar una recta que pase por el centro de las circunferencias violetas pues estos puntos están alineados.

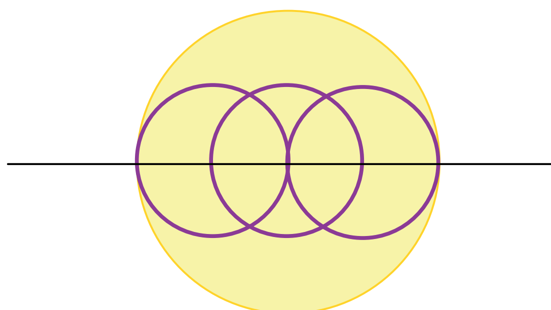


Dos o más puntos están **alineados** si pertenecen a la misma recta.

El centro del círculo amarillo coincide con el centro de la segunda circunferencia violeta
La circunferencia amarilla y la circunferencia violeta son concéntricas.

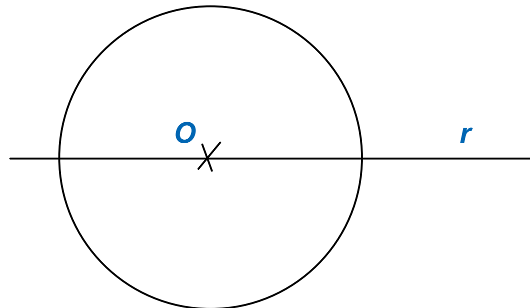
Dos o más circunferencias son **concéntricas** si tienen el mismo centro.

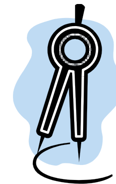




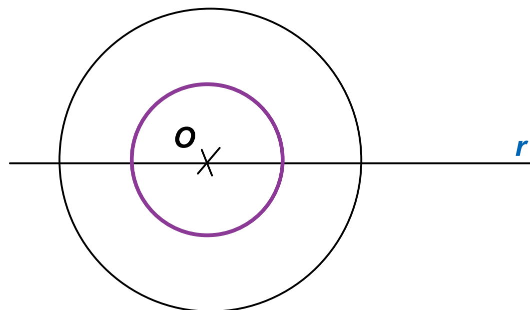


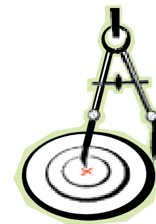
*Por lo tanto, para copiar la figura trazamos una recta **r** y elegimos un punto **O** de esa recta como centro del círculo amarillo. Con el compás dibujamos una circunferencia cuyo radio es el doble del radio de la circunferencia violeta.*



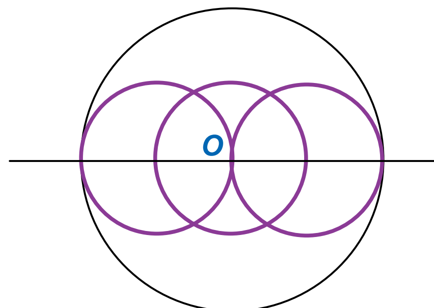


*Como esta circunferencia y la circunferencia violeta del medio son concéntricas trazamos una circunferencia de centro **O** y radio igual al de la circunferencia violeta.*

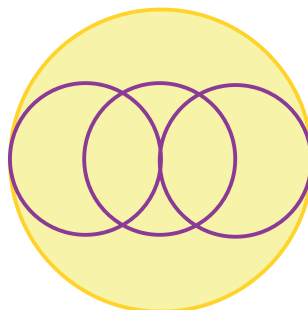




*Trazamos las dos circunferencias restantes con el mismo radio apoyando el compás en la intersección de la circunferencia violeta de centro **O** con la recta **r**.*



Borramos la recta y la letra. Pintamos y tenemos una copia del distintivo de Tobías.





Para asegurarnos que lo reprodujimos correctamente podemos superponerlo a la figura original.

Los amigos, muy entusiasmados con sus dibujos, deciden pensar más opciones de distintivos.

Margarita encuentra la siguiente figura formada por un segmento y tres semicircunferencias. Desafía a los chicos a construir otra figura similar en la cual los radios de las semicircunferencias se dupliquen usando sólo compás y regla no graduada.





Una **semicircunferencia** es la mitad de una circunferencia.

▶ ¿Cómo se puede construir la figura propuesta por Margarita?

*Trazamos una recta **r** y elegimos un punto **A** de esa recta.*

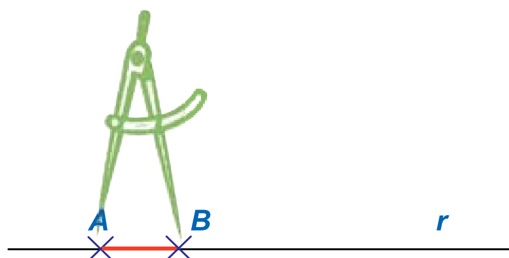


*Podemos comenzar usando regla y compás para copiar sobre la recta **r** el diámetro de la semicircunferencia verde que es la más pequeña.*

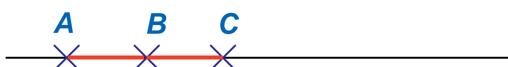
El compás permite transportar cualquier segmento, así como duplicarlo o triplicarlo

Ubicamos el compás de tal manera que los" extremos" de éste coincidan con los extremos del diámetro.

*Cuidando de no modificar la abertura del compás con centro en **A** (o sea apoyando el compás en **A**) marcamos un arco de circunferencia, el punto donde corta la recta lo llamamos **B**. Así determinamos el otro extremo del segmento.*

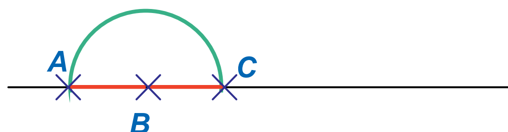


*Como queremos duplicarlo, sin mover la abertura del compás, con centro en **B** trazamos otro arco de circunferencia marcando el punto **C**.*



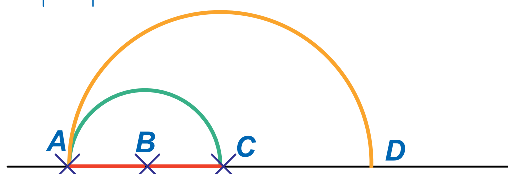
*El punto **A** y el punto **C** son los extremos del segmento buscado, su medida es el doble de la medida del diámetro de la semicircunferencia verde.*

*Para continuar con el trazado, con centro en la primera intersección **B** dibujamos una semicircunferencia de radio igual a la medida de* $\overline{AB}$.



Observamos que cada una de las semicircunferencias tiene por radio la medida del diámetro de la que la antecede en tamaño.

*Para trazar la semicircunferencia naranja con el compás hacemos centro en **C** y con radio igual a* $|\overline{AC}|$ *dibujamos la semicircunferencia naranja.*



Para el último paso repetimos el procedimiento anterior apoyando el compás en el punto D que es el extremo del diámetro de la semicircunferencia naranja.

La medida de este diámetro es el radio de la semicircunferencia violeta que debemos construir.

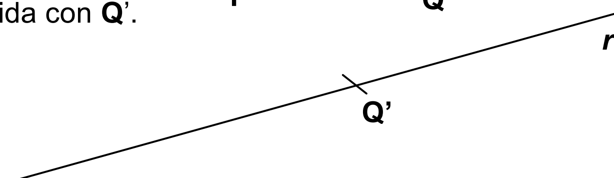
Borramos las construcciones auxiliares y nos queda el dibujo que quería Margarita.



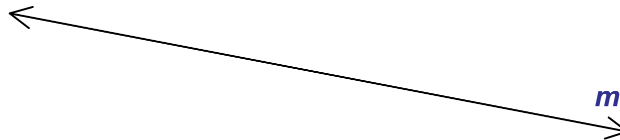
◈ *Para que lo intentes solo...*

Las siguientes actividades se realizan en hoja lisa, con compás y regla no graduada.

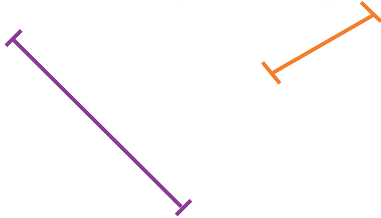
5. a) Transportá el segmento $\overline{PQ}$ sobre la recta ***r*** de manera que el punto **Q** coincida con **Q**'.



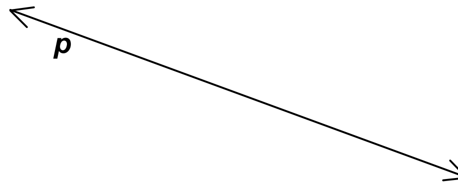
b) Elegí un punto cualquiera perteneciente a la recta ***m*** y copiá el segmento $\overline{PQ}$.



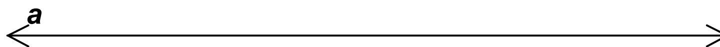
6. Dados los siguientes segmentos:



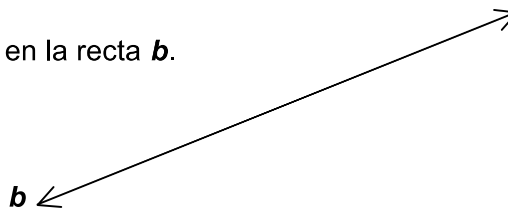
a) Copialos en la recta ***p***.



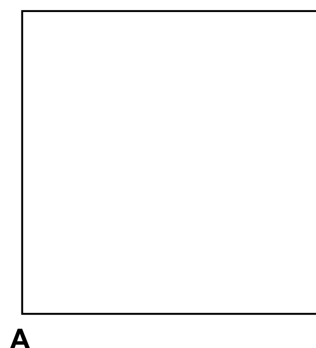
b) Duplicá el segmento violeta en la recta ***a***.



c) Triplicá el segmento naranja en la recta ***b***.

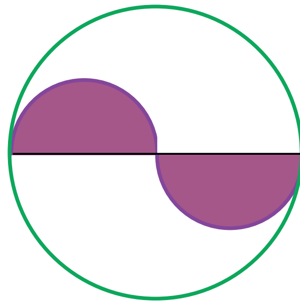


7. La figura es un cuadrado de 4cm de lado.
Coloreá de rojo la parte del cuadrado que está a menos de 4 cm de **A**, de azul la que está a 4cm de **A** y de verde la que está a más de 4 cm de **A.**

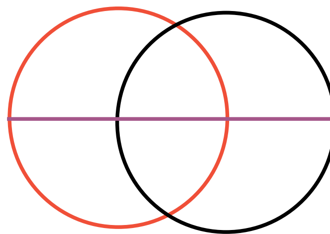




8. Copiá la siguiente figura sabiendo que el radio de los semicírculos violetas es la medida del segmento |———| :

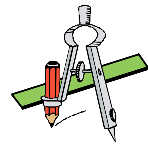


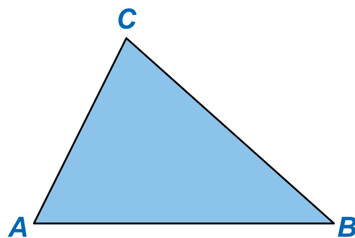
9. Dibujá la siguiente figura de manera que la distancia entre los centros de ambas circunferencias sea el doble.



MÁS CONSTRUCCIONES

► ¿Cómo graficar un triángulo congruente al triángulo ***ABC***, con regla y compás?

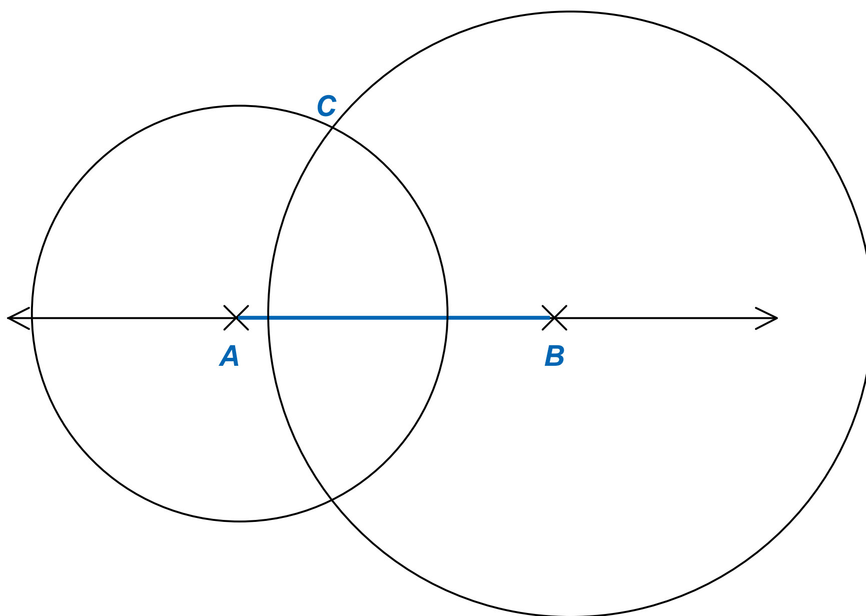




*Sobre una recta marcamos el punto **A**, elegimos una de las dos semirrectas que quedan determinadas y usando el compás copiamos el segmento* $\overline{AB}$.

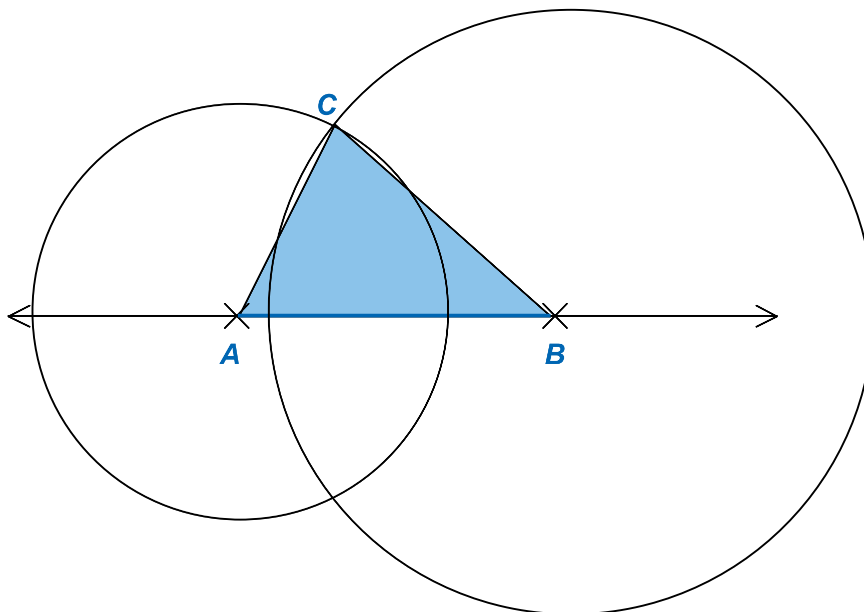


*Con centro en **A** trazamos una circunferencia de radio igual a la medida de* $\overline{AC}$ *y con centro en **B** una circunferencia con radio igual a la medida de* $\overline{BC}$.

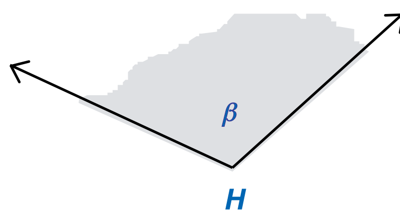


*Observamos que las dos circunferencias se cortan en el punto **C**, que es el otro vértice del triángulo.*

*Unimos con la regla **A** con **C** y **B** con **C** y obtenemos un triángulo congruente al triángulo **ABC**.*

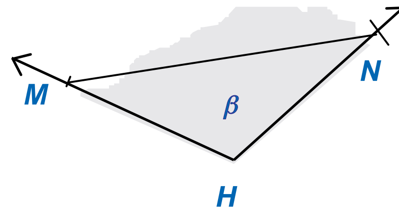


► ¿Cómo copiar el ángulo ***β*** usando regla y compás?

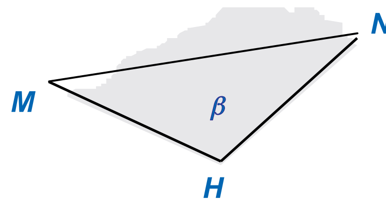


Podemos copiarlo de dos maneras diferentes.

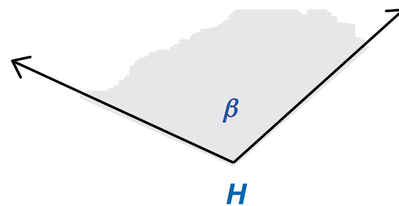
- *Una forma es construyendo primero un triángulo. Marcamos dos puntos cualesquiera sobre los lados del ángulo, por ejemplo **M** y **N** y trazamos el segmento* $\overline{MN}$ *.*



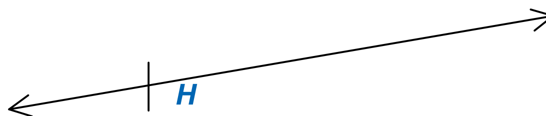
*Queda determinado el triángulo **MHN**.*
Construimos un triangulo congruente, siguiendo el procedimiento anterior.



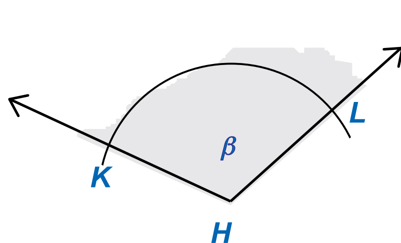
Prolongamos los segmentos trazando las semirrectas $\overrightarrow{HM}$ *y* $\overrightarrow{HN}$ *que son los lados del ángulo **ß** y borramos el segmento **MN**.*

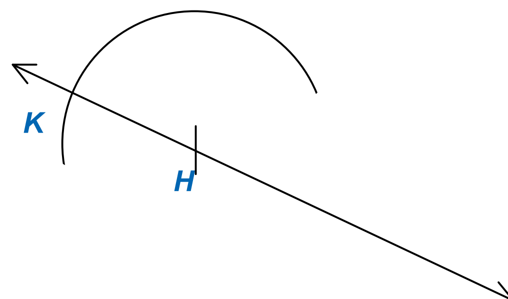


- *Otra forma es la siguiente:*
  *trazamos una recta auxiliar y marcamos el punto **H.***



*En el ángulo dado trazamos un arco de circunferencia de cualquier radio, con centro en **H**. Llamamos **K** y **L** a los puntos en los que el arco corta a los lados del ángulo.*



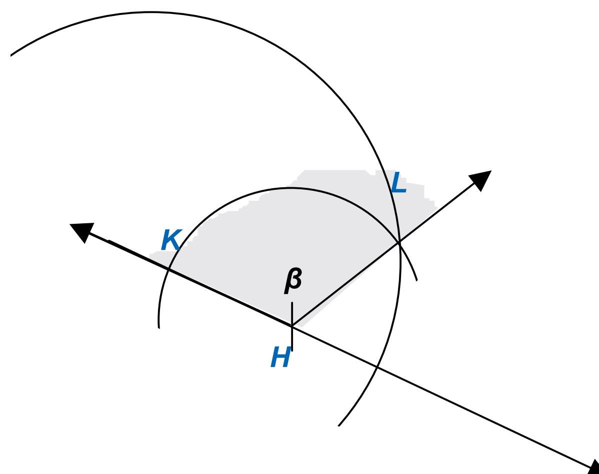


*Sin mover la abertura del compás, trazamos un arco en la recta auxiliar, con centro en **H** y con el mismo radio. Llamamos a la intersección entre el arco y la recta, punto **K***

*Considerando que **K** y **L** son los extremos de un segmento, apoyamos en **K** y abrimos el compás hasta hacer coincidir el otro extremo con el punto **L.***

*Sin mover la abertura del compás, trazamos un arco de circunferencia de centro **K** con esta medida como radio.*

*Al punto de intersección de los dos arcos lo llamamos **L.***



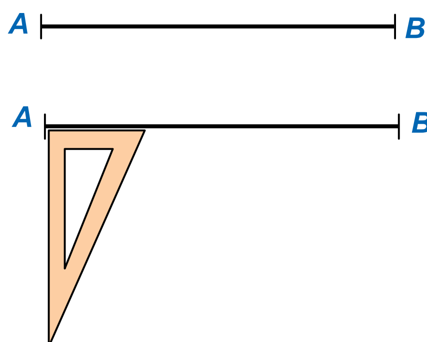
*El otro lado del ángulo **β** es la semirrecta con origen en **H** que pasa por **L**. Obtenemos así un ángulo congruente al ángulo **β**.*

Hemos trabajado sólo con regla no graduada y compás, ahora además utilizaremos la escuadra que nos servirá para dibujar ángulos rectos.

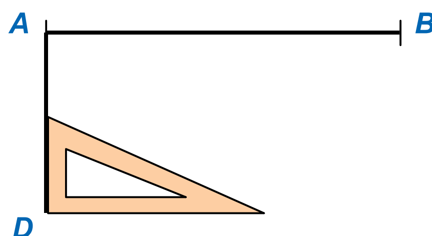


► ¿Cómo dibujar un rectángulo con la escuadra?

*Trazamos un segmento **AB** de cualquier medida y apoyamos la escuadra con el ángulo recto sobre el vértice **A** para trazar el lado **AD.***

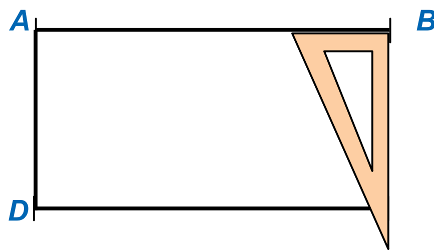


*Apoyamos la escuadra con el ángulo recto sobre **D** y trazamos el otro lado.*



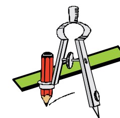
*Apoyamos la escuadra sobre el vértice **B** y trazamos otro ángulo recto.*







*Obtenemos así el rectángulo **ABCD**.*



◈ *Para que lo intentes solo...*

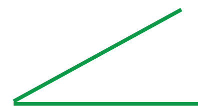
10. Utilizando escuadra , regla no graduada y compás, completá la figura para formar un cuadrado.



11. Utilizando escuadra y regla no graduada, completá la figura para formar un rectángulo, sabiendo que el segmento dado es uno de sus lados. ¿Es única la construcción?



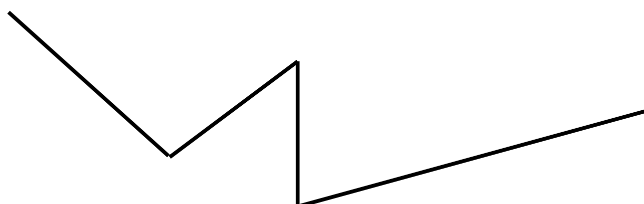
12. Los siguientes segmentos son lados de un rombo. Completá el dibujo para obtener el rombo usando regla no graduada y compás.



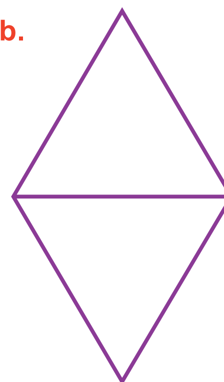
13. Dibujá un rombo tomando como lado el siguiente segmento 
¿Cuántos rombos hay que cumplan con esta condición? Explicá tu respuesta.

14. Usando regla no graduada y compás, copiá los siguientes dibujos:

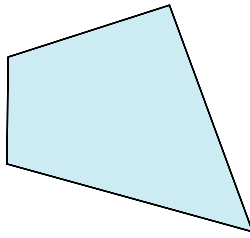
a.

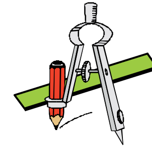


b.

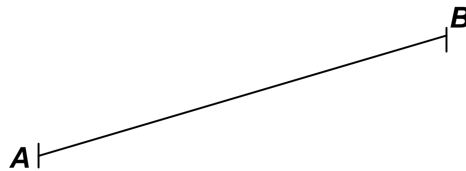


15. Construí un cuadrilátero congruente al dibujado, usando regla y compás.





16. Completá tal que $|A\hat{B}C| = 90^\circ$



MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Eduardo está planificando su parque en el que quiere plantar varios árboles. Lo único que tiene plantado, hasta ahora, es un roble y un pino que se encuentran a 5 metros de distancia.

Quiere colocar un nogal que esté a 2 metros del roble y a 4 metros del pino.

► ¿Dónde tendría que ubicar el nogal? ¿Cuántas posibilidades tiene?

*Para planificar el lugar donde va a plantar el nogal podemos hacer un esquema en el que representamos un metro de la realidad por un centímetro en el dibujo. Entonces dibujamos un segmento de 5cm y llamamos a sus extremos **R** y **P**.*



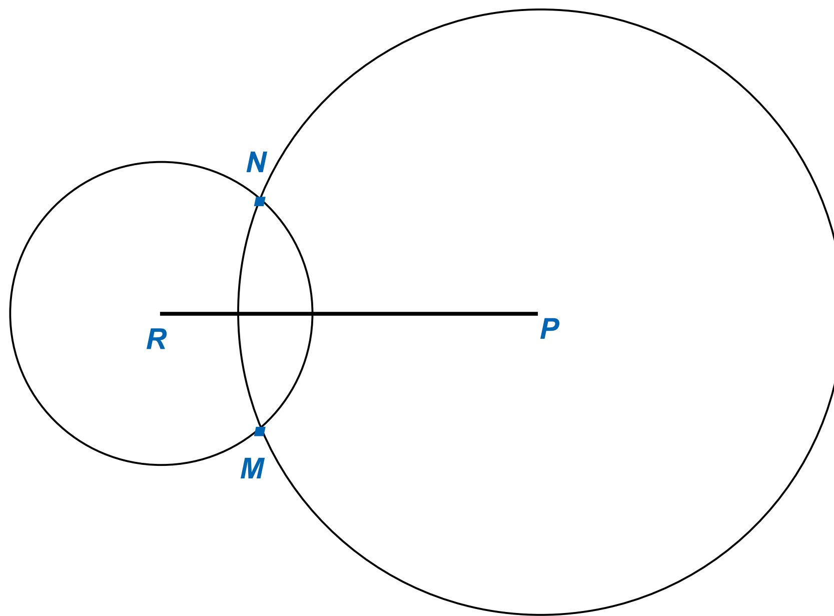
La medida del segmento $\overline{RP}$ *representa la distancia que separa en la realidad los dos árboles.*

*Para dibujar todos los puntos que se encuentran a una distancia de 2cm de **R** trazamos una circunferencia de centro **R** y radio 2cm, y una circunferencia de centro **P** y radio 4cm para representar todos los puntos que están a 4cm de **P**.*

*Los puntos que cumplen con las dos condiciones son los puntos **N** y **M** que son la intersección de ambas circunferencias.*

*Vemos que Eduardo tiene dos posibles ubicaciones para el nogal que son los lugares representados por los puntos **N** y **M**.*

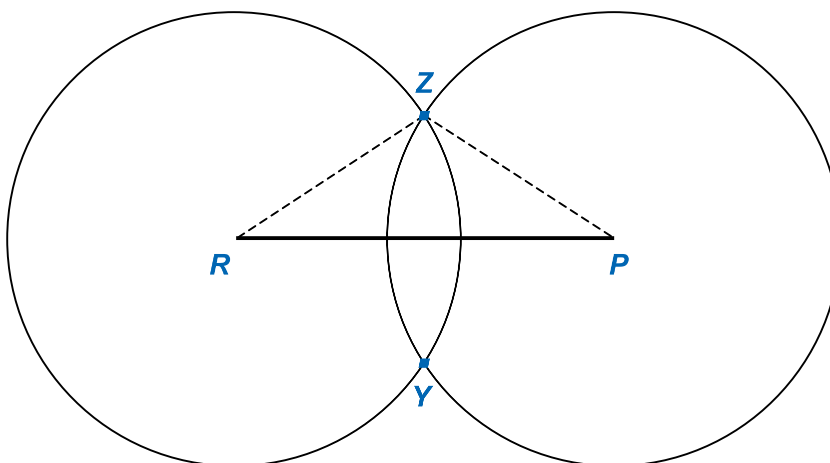




Ahora Eduardo quiere marcar en el esquema los puntos que correspondan a tres nuevos árboles. Un jacarandá que se encuentre a 3 metros del roble y del pino respectivamente, un ciprés que se encuentre a 4 metros de ambos árboles y un plátano que se halle a 4,5 metros de ambos árboles también.

► ¿Dónde tendría que ubicar estos árboles? ¿Cuántas posibilidades tiene?

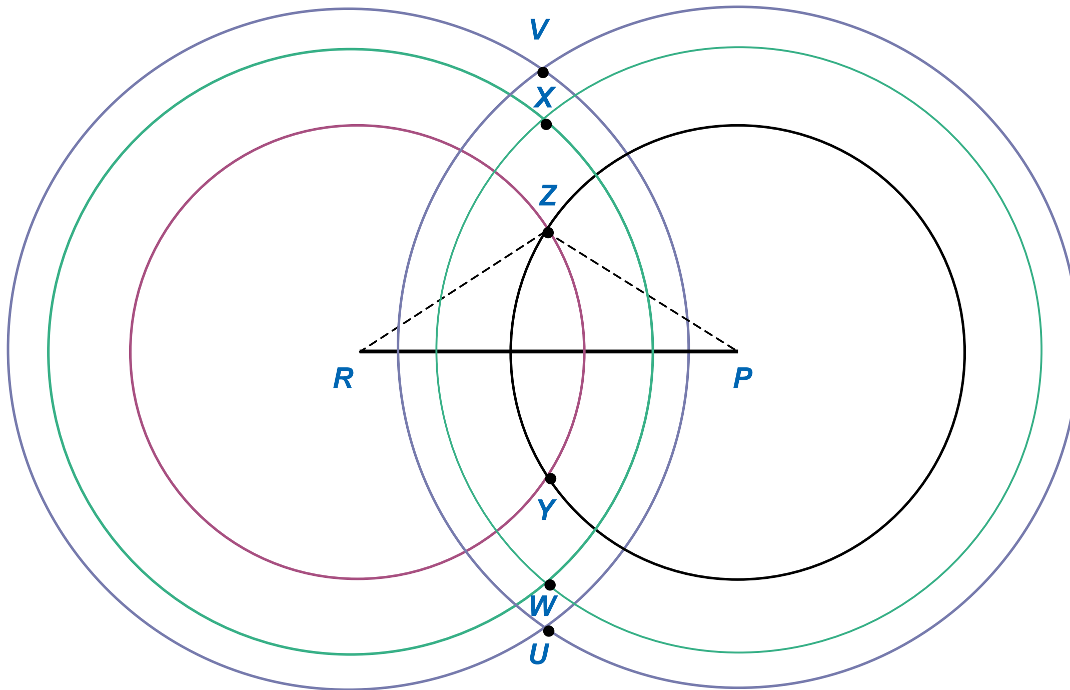
Para ubicar estos puntos repetimos el procedimiento anterior trazando las circunferencias con centro en ***R*** *y* ***P*** *con los radios correspondientes .Por ejemplo para ubicar el jacarandá trazamos dos circunferencias de radio igual a 3cm, una con centro en* ***R*** *y otra con centro en* ***P****.*



Los puntos que están a 3cm de ***R*** *y de* ***P*** *son:* ***Z*** *y* ***Y.***

De la misma manera repetimos el procedimiento para el ciprés y el plátano. En un caso trazamos dos circunferencias de radio igual a 4cm de centros ***R*** *y* ***P****, y en el otro, dos circunferencias de radio igual a 4,5cm también de centros* ***R*** *y* ***P****.*

*Los puntos que están a 4 cm de **R** y de **P** son: **X** y **W.** Y los puntos que están a 4,5 cm son: **V** y **U.***

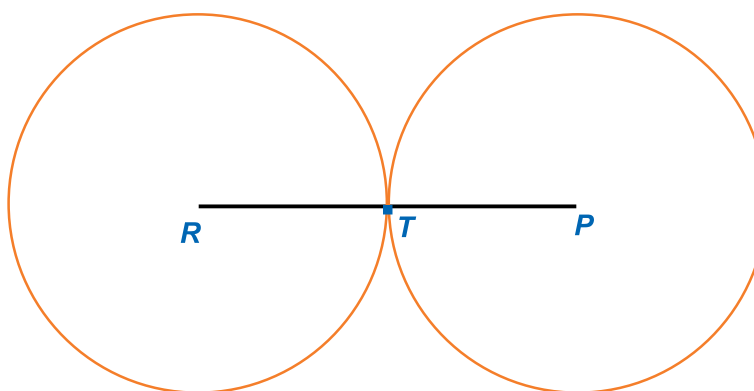


Observamos que para cada árbol tiene dos posibles puntos para plantarlos que cumplen las condiciones pedidas.

Finalmente, Eduardo quiere ubicar un sauce a 2,5m del roble y el pino.

► ¿Cuántas opciones tiene para ubicarlo?

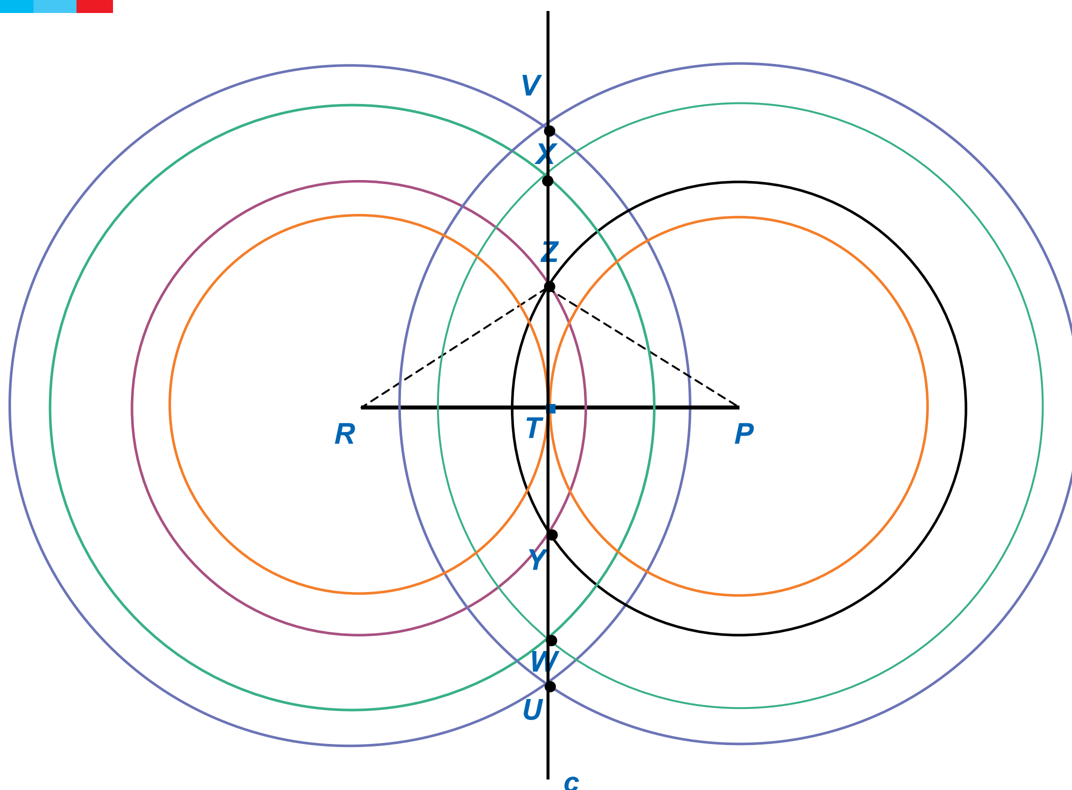
*Repetimos el procedimiento anterior y observamos que en este caso las dos circunferencias de radio igual a 2,5 cm se cortan en un único punto **T.** Dicho punto equidista de **R** y de **P**, es decir, es el punto medio del segmento **RP**.*



*Podemos unir los puntos **T**, **U**, **V**, **W**, **X**, **Y**, **Z** que marcamos con una recta **c**.*

*Entonces los puntos determinados por la intersección de cualquier par de circunferencias de centro **R** y **P** y el mismo radio, determinan una recta perpendicular al segmento **RP** que pasa por su punto medio **T**.*





Los puntos que equidistan de los extremos de un segmento están sobre una recta que es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.
*Esta recta es la **mediatriz** del segmento **RP**.*

*La mediatriz del segmento **RP** la notamos* $m_z(\overline{RP})$.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que pasa por su punto medio.

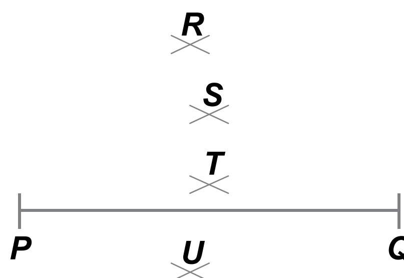
Los puntos que **equidistan** (están a igual distancia) de los extremos de un segmento están sobre la **mediatriz** del mismo.

Los puntos de la **mediatriz** de un segmento **equidistan** de los extremos del mismo.

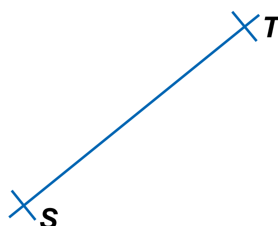
Para que lo intentes solo...



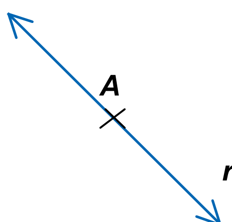
17. **a)** Utilizando sólo el compás, decidí cuáles de los puntos ***R***, ***S***, ***T*** o ***U*** pertenecen a $m_z(\overline{PQ})$.



b) Encontrá tres puntos que pertenezcan a la mediatriz de $|\overline{ST}|$.



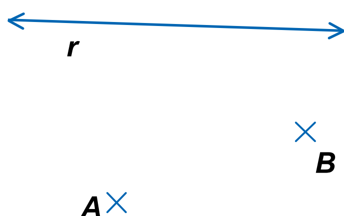
18. Trazá una recta perpendicular a **r** que pase por **A**.
Utilizá regla y compás.



19. Dividí el segmento ***PQ*** en cuatro segmentos congruentes.



20. Dibuja el triángulo **ABC** si se sabe que **C** está sobre la recta **r** y a la misma distancia de **A** y **B**.



MEDIATRICES DE UN TRIÁNGULO

Mariano, Santiago y Josefina deciden enterrar en un parque una caja con mensajes para leerlos en el futuro. Para ello tienen que buscar un escondite secreto que les permita desenterrarlo más adelante.

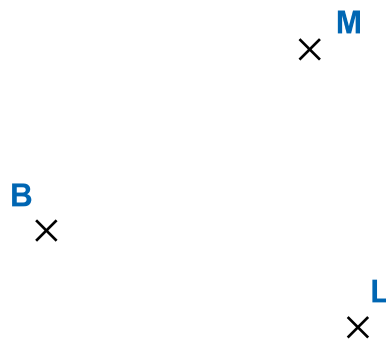
En el parque hay un monumento, un mástil y un bebedero.

Los chicos piensan que un buen lugar para enterrar la caja sería un punto que esté a igual distancia del monumento, del mástil y del bebedero. Deciden hacer un dibujo para representar la situación.

► ¿Cómo pueden determinar ese lugar?

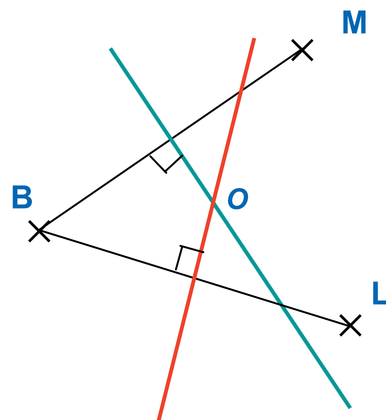
*Marcamos los puntos **B**, **M** y **L** que representan el bebedero , el monumento y el mástil respectivamente.* .





*Trazamos el segmento **BM** y luego su mediatriz. Todos los puntos que están sobre ella equidistan de **B** y de **M**.*

*Trazamos la mediatriz correspondiente al segmento **BL**.*

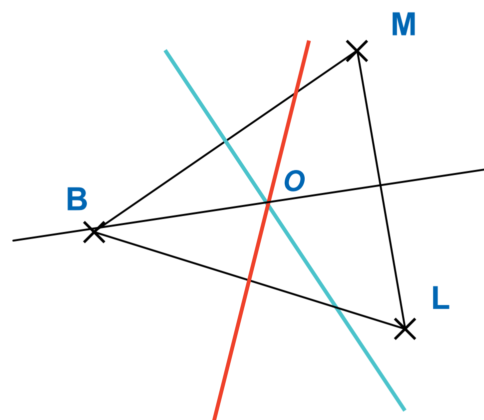


*Las dos mediatrices trazadas se cortan en un único punto **O** que está a igual distancia de **B**, de **M** y de **L**.*

*El punto **O** es el buscado por los chicos pues equidista de los tres puntos.*

*Si trazamos la mediatriz correspondiente al segmento **LM** va a cortar a las otras dos en el mismo punto **O.***

*Vemos que si unimos los puntos **B**, **M** y **L**, a través de segmentos obtenemos un triángulo. Las mediatrices dibujadas se llaman **mediatrices de un triángulo.***



En todo triángulo las mediatrices se cortan en un punto
que equidista de sus vértices.
No siempre el punto de intersección es un punto interior del triángulo.

Para que lo intentes solo...

21. Dibujá un triángulo acutángulo, otro rectángulo y otro escaleno y trazá en cada uno de ellos sus tres mediatrices.

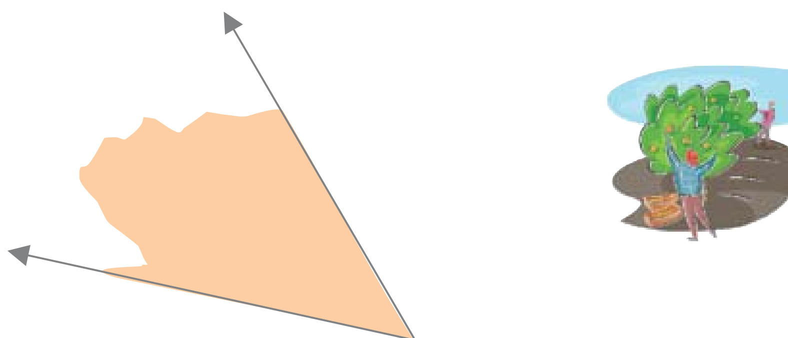
Establecé donde se encuentra el punto de intersección en cada caso.

22. Completá con V o F el siguiente cuadro:

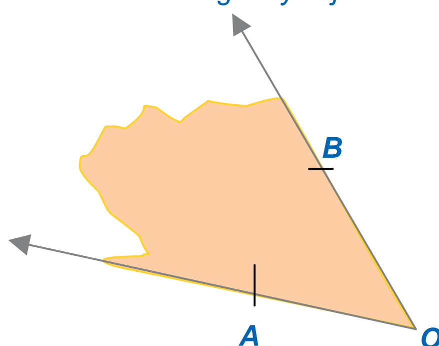
a) Para trazar la mediatriz del segmento **AB** las circunferencias con centro en **A** y **B** deben tener un radio mayor a la mitad del lado.	
b) Sin considerar el punto medio del segmento, los puntos de la mediatriz con los extremos **A** y **B**, forman un triángulo isósceles.	
c) El punto de intersección de las mediatrices equidista de los lados del triángulo.	
d) El punto de intersección de las mediatrices de un triángulo equilátero es un punto exterior al triángulo	

BISECTRIZ DE UN ANGULO

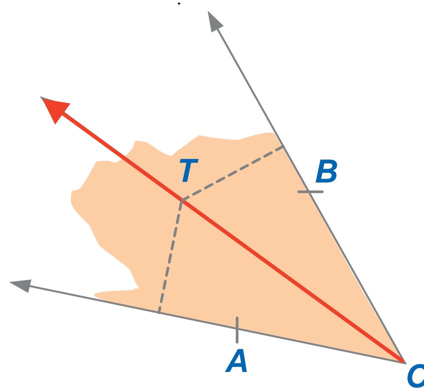
Alejandro está diseñando un sistema de riego para su huerta. Quiere colocar una fila de regadores que se encuentren a igual distancia de sus hortalizas que están alineadas sobre los lados de un ángulo agudo como muestra el dibujo.



*Llamemos **O** al vértice del ángulo y elijamos un punto perteneciente a cada una de sus lados.*



Si trazamos los puntos del ángulo que están a igual distancia de sus lados obtenemos una semirrecta interior al ángulo con vértice en ***O****.*



La semirrecta $\overrightarrow{\textbf{OT}}$ *está formada por todos los puntos del ángulo* ***AOB*** *que equidistan de sus lados y a su vez divide al ángulo en dos ángulos congruentes.*

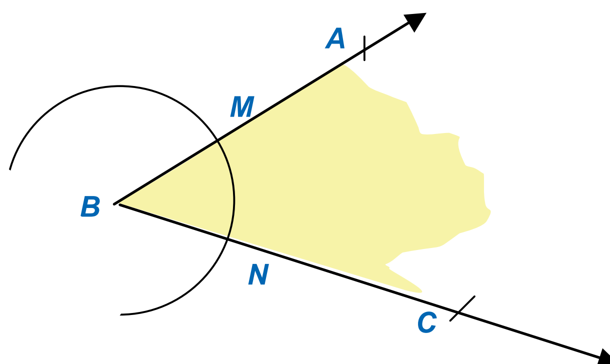
Alejandro debe colocar los regadores sobre esta semirrecta.

Esta semirrecta es la ***Bisectriz del ángulo*** $\mathbf{A\hat{O}B}$**.**

> La **bisectriz** de un ángulo
> es la semirrecta con origen en su vértice que lo divide en dos ángulos congruentes.
> Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.

Para trazar la **Bisectriz de un ángulo** con regla y compás realizamos el siguiente procedimiento:

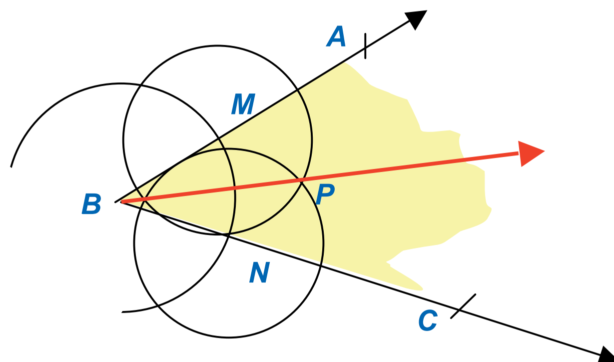
Dado el ángulo **ABC**



Trazamos un arco de circunferencia de centro en ***B****, de manera que corte a* $\overrightarrow{\textbf{BA}}$ en ***M*** *y a* $\overrightarrow{\textbf{BC}}$ en ***N****.*

Con centro ***M*** *y con una medida mayor al radio del arco anterior trazamos un nuevo arco de circunferencia.*

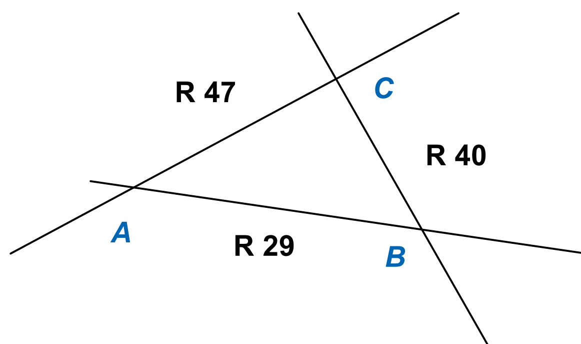
Sin modificar la apertura del compás, apoyamos en ***N*** *y trazamos un arco de manera de determinar un punto* ***P****.*



*Unimos **P** con **B**. La semirrecta $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del ángulo **ABC**.*

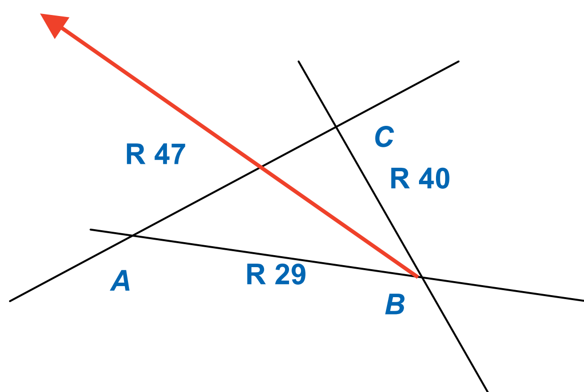
BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO

Se quiere colocar una estación de servicio a igual distancia de tres rutas: la 40, la 29 y la 47, cuyo esquema es el siguiente:



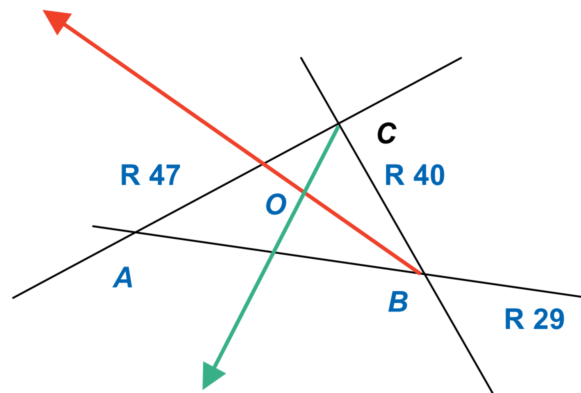
*Llamamos **A, B** y **C** a las intersecciones de las rutas.*

*Para que un punto esté a igual distancia de las rutas **40** y **29**, debe pertenecer a la bisectriz del ángulo **ABC**.*





*Los puntos que equidistan de las rutas **47** y **40** se encuentran en la bisectriz del ángulo **ACB**.*



*Si trazamos las bisectrices de los ángulos **ABC** y **ACB**, hallamos el punto **O**, punto de intersección de las bisectrices. Dicho punto equidista de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, por lo tanto representa el lugar donde se debe colocar la estación de servicio.*

> En todo triángulo las bisectrices se cortan en un punto interior que equidista de sus lados

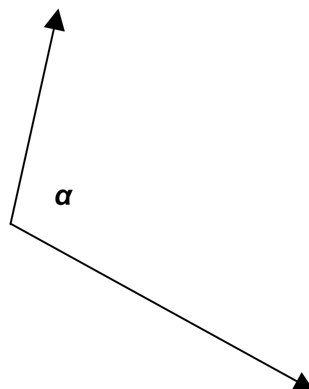
Más problemas

23. $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ángulo ***β***. Trazá el ángulo ***β***.



¿Es la única posibilidad? Explicá tu respuesta.

24. Trazá con regla y compás un ángulo cuya amplitud sea la cuarta parte de **α**.

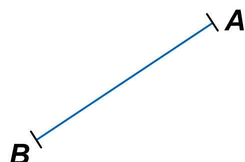


25. Dibujá con regla y compás un ángulo de:

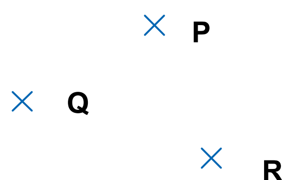
a) 90º b) 45º c) 60º

26. Dibujá, si es posible,

a) tres circunferencias que pasen por los extremos del segmento **AB**.

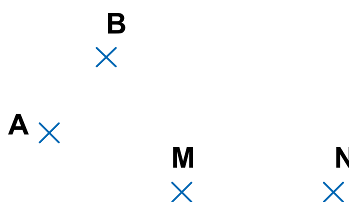


b) dos circunferencias que pasen por **P**, **Q** y **R**.



En caso de no ser posible justificá tu respuesta.

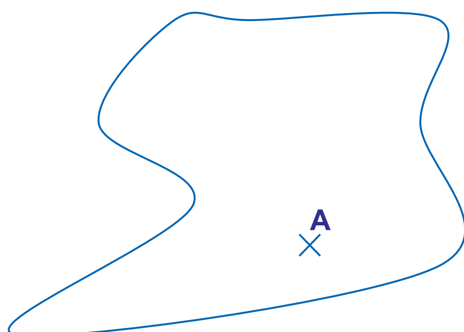
27. Los puntos **A** y **B** pertenecen a la bisectriz de un ángulo α. **M** y **N** son puntos de uno de sus lados. Dibujá el ángulo α.



28. Considerá este segmento ├──────┤ como unidad de medida.

Utilizando regla no graduada y compás

a) Marcá con cruces todos los puntos que están sobre la curva a una distancia de **A** igual a la medida del segmento dado.

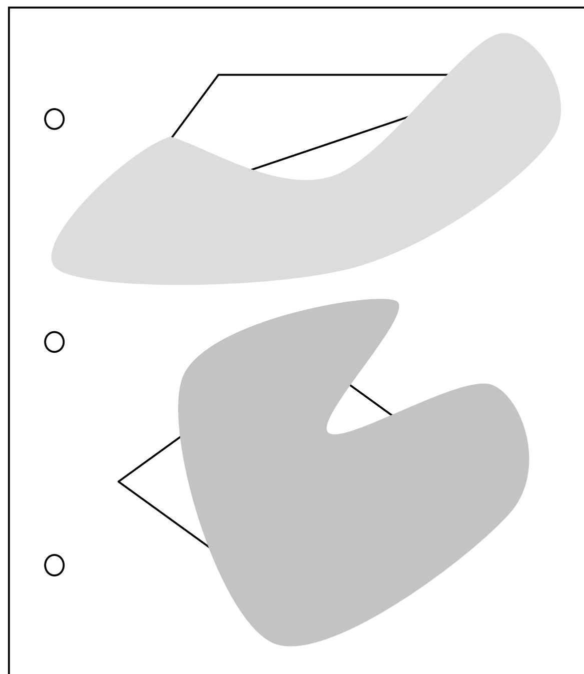




b) Colorea de rojo la parte interior a la curva que está a menor distancia de **A** que la medida del segmento.

c) Coloreá de azul la parte interior a la curva que está a mayor distancia de **A** que la medida del segmento.

29. A Francisco se le se ha manchado una hoja de su carpeta de matemática y se le borró parte de lo que tenía. Había dibujado un paralelogramo y un rombo, cada uno con una de sus diagonales.
¿Podés completar las figuras nuevamente?



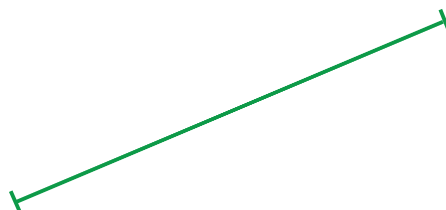
30. Trazá una circunferencia de centro **L** y radio **r** igual a la medida del segmento



Marcá, siempre que sea posible tres puntos: **A**, **B** y **C** en la circunferencia de manera que:

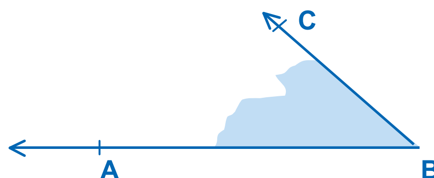
a) la distancia entre **A** y **B** sea el doble de ***r***.
b) la distancia entre **A** y **C** sea ***r***.
c) la distancia entre **D** y **C** el triple de ***r***.

31. Encontrá sin usar regla graduada, las tres cuartas partes de este segmento

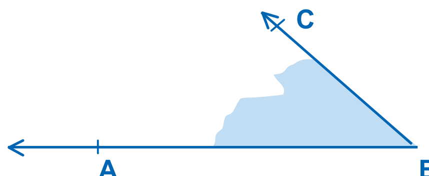


32. Traza en cada caso, el triángulo isósceles **ABP** si se sabe que **P** está sobre la bisectriz de $\hat{ABC}$ y:

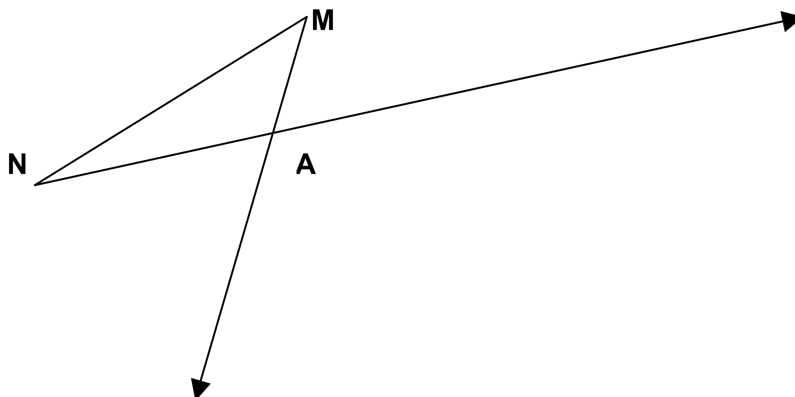
a) $|\overline{AB}| = |\overline{BP}|$.



b) $|\overline{AP}| = |\overline{PB}|$.

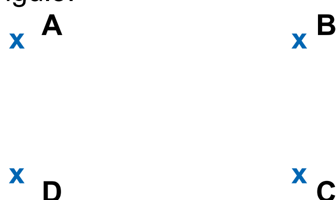


33. Dibujá un triángulo **MNO** sabiendo que $\overrightarrow{NA}$ es bisectriz del ángulo **MAO** y $\overrightarrow{MA}$ es bisectriz del ángulo **NMO.**

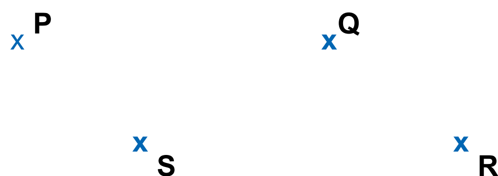


34. Dibujá, <u>si es posible</u>,

a) una circunferencia que pase por **A**, **B**, **C** y **D**, sabiendo que **A**, **B**, **C** y **D** son los vértices de un rectángulo.



b) una circunferencia que pase por **P**, **Q**, **R** y **S**, sabiendo que **P**, **Q**, **R** y **S** son los vértices de un paralelogramo.



En caso de no ser posible, justificá tu respuesta.



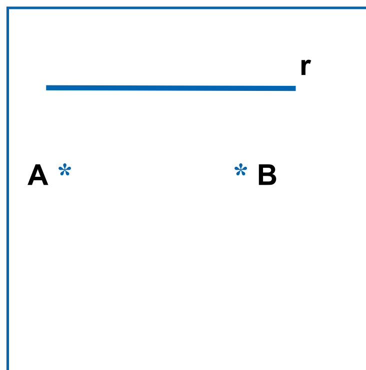


35. Los intendentes de dos localidades cercanas van a construir un hospital para que atienda a los habitantes de ellas. En función de esto, planifican el trazado de una nueva ruta que facilite la comunicación.

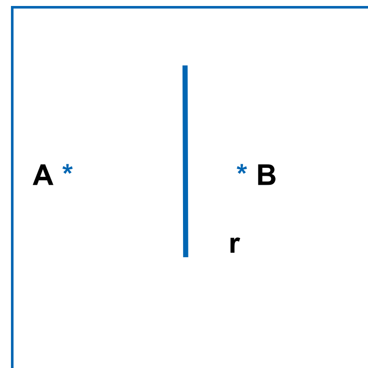
a) En los dibujos los puntos **A** y **B** representan las dos localidades, la recta **r** el posible trazado de la nueva ruta. El hospital debe ser construido sobre la nueva ruta r y a igual distancia de las localidades **A** y **B.** En cada dibujo marcá con una **X**, un punto, en el que podría construirse el hospital. Llamá al punto **"H".**

Nota: Los intendentes no saben geometría y puede no existir un punto que cumpla con las condiciones.

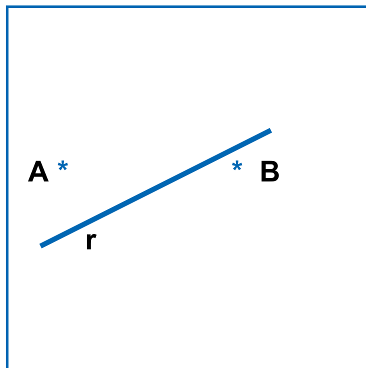
I.



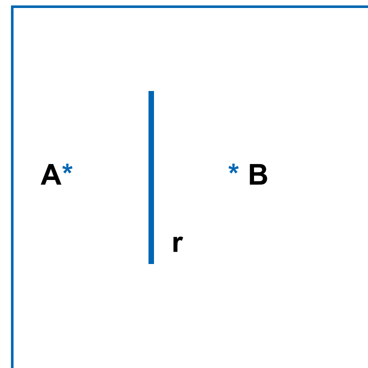
II.



III.



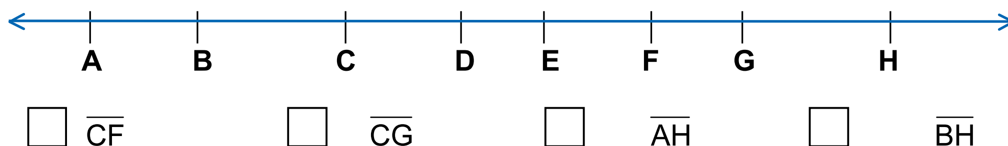
IV.



b) Completá el cuadro poniendo una **X** en el casillero correspondiente, según la cantidad de puntos que existen en cada caso, para ubicar el hospital.

	I	II	III	IV
HAY UN ÚNICO PUNTO				
NO HAY PUNTOS				
HAY MÁS DE UN PUNTO				

36. La bisectriz de $\boldsymbol{A\hat{E}G}$ está incluida en la mediatriz de:
Marcá con una X la o las respuestas correctas.



☐ $\overline{CF}$ ☐ $\overline{CG}$ ☐ $\overline{AH}$ ☐ $\overline{BH}$

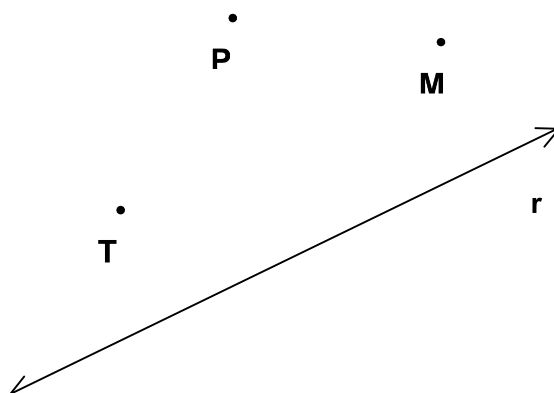
37. En el siguiente esquema están representados tres poblados con letras las **T**, **P** y **M** y con una recta **r** la ruta más cercana a ellos.

a) Se tiene que construir sobre la ruta tres puentes de manera tal que los habitantes de cada uno de los pueblos tengan que caminar lo menos posible.

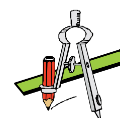
b) Un hospital que equidiste de los tres pueblos.

c) Una estación de bomberos sobre la ruta que equidiste de los pueblos **P** y **M.**

Marcá en el dibujo la ubicación de los puentes, el hospital y la estación de bomberos.

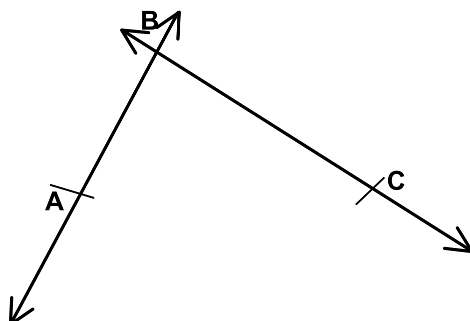


38. En el esquema, los puntos **A**, **B** y **C** representan tres barrios, las rectas **BC** y **BA** representan rutas que pasan por esos barrios
Se quiere edificar un hospital, de manera que esté:



- a la misma distancia de los barrios representados por **B** y **C**.
- a la misma distancia de las rutas **BC** y **BA**.

¿Dónde se puede construir el hospital? *Marcalo en el dibujo.*



Respuestas del bloque 4

1.	**a)** Por ejemplo ***AD*** y ***GC***. **b)** Por ejemplo ***DG*** y ***BE***. **c)** Por ejemplo $A\hat{D}E$. **d)** Por ejemplo $G\hat{F}C$ **e)** Por ejemplo $D\hat{F}C$ **f)** Por ejemplo $D\hat{E}F$
2.	Ver al pie de la tabla.
3.	Ver al pie de la tabla.
4.	**a)** 10 **b)** 7 **c)** 8
5.	**a)** Transportamos el segmento $\overline{PQ}$ haciendo coincidir uno de sus extremos con ***Q'***. **b)** Elegimos un punto ***P'*** sobre la recta m. Luego con el compás transportamos el segmento $\overline{PQ}$. Apoyamos el compás en ***Q'*** y volvemos a copiar el segmento $\overline{PQ}$ así obtenemos el segmento $\overline{P'R'}$ cuya medida es el doble de $\overline{PQ}$.

2.

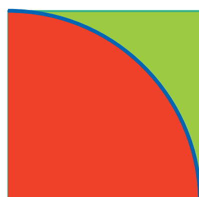
	SIEMPRE	A VECES	NUNCA
Un triángulo equilátero es isósceles.	X		
Un triángulo isósceles es equilátero.		X	
Un triángulo escaleno es isósceles.			X
Un triángulo rectángulo es isósceles.		X	
Un triángulo isósceles es rectángulo.		X	
Un triángulo escaleno es rectángulo.		X	
Un triángulo equilátero es rectángulo.			X
Un triángulo isósceles tiene dos ángulos congruentes.	X		

3.

	V	F
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.	X	
Todo paralelogramo es un rectángulo.		X
Todo rectángulo es un paralelogramo.	X	
Todo rombo es un cuadrado.		X
Todo cuadrado es un rombo.	X	
Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes	X	
Todo trapecio tiene los lados no paralelos congruentes.		X
Todo romboide tiene un par de ángulos opuestos congruentes.	X	
Todo romboide tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes.		X
Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.	X	

6.	a) Elegimos un punto en la recta m y copiamos los segmentos usando el mismo procedimiento que en 5. b) Usamos el mismo procedimiento que en 5b). c) Una vez que trasportamos dos veces al segmento como en b) lo trasportamos una vez más usando el mismo procedimiento.
7.	Trazamos una circunferencia de centro A y radio igual a la medida del lado del cuadrado. Ver al pie de la tabla.
8.	Por ejemplo: trazamos una recta auxiliar. Elegimos un punto sobre la recta y copiamos el segmento dado. Con centro en su extremo y radio igual a su medida trazamos una semicircunferencia. Repetimos el procedimiento dibujando la semicircunferencia del otro lado de la recta. Con centro en el punto en común de ambas semicircunferencias trazamos un circunferencia cuyo radio es el doble de la medida del segmento dado. Pintamos los puntos interiores determinados por las semicircunferencias y la recta.
9.	Trazamos una recta. El radio de las nuevas circunferencias es igual a la medida del diámetro de las dadas. Elegimos un punto sobre la recta como centro y trazamos la nueva circunferencia roja. El punto donde corta a la recta es el centro de la circunferencia violeta de radio el doble de la dada.
10.	Prolongamos el lado más pequeño. Con el compás con centro en ***P*** trazamos un arco de radio igual a la medida del segmento mayor y marcamos un punto donde corta la prolongación. Tenemos así dos de los lados del cuadrado. Apoyando la escuadra en el extremo de cada uno de los lados trazamos los otros dos.
11.	Trazamos los lados que faltan apoyando la escuadra en los extremos del segmento. Hay infinitas posibilidades porque el otro lado puede tener cualquier medida.
12.	Unimos los extremos de los segmentos. Nos queda determinado un triángulo. Trazamos un triángulo congruente haciendo coincidir la base con el segmento trazado que es una de las diagonales del rombo.
13.	Copiamos el segmento dado haciendo coincidir unos de sus extremos y repetimos el procedimiento de 12.
14.	a) Copiamos sucesivamente los segmentos y los ángulos. b) Copiamos los dos triángulos haciendo coincidir su base.
15.	Copiamos sucesivamente lados y ángulos del cuadrilátero. También podemos dividir el cuadrilátero en dos triángulos y copiar éstos.
16.	Apoyamos la escuadra en ***B*** y trazamos la perpendicular.
17.	*a)* ***S*** y ***T*** *b)* Trazamos circunferencias de igual radio con centro en los extremos del segmento. Por cada par de circunferencias obtenemos dos puntos. Podríamos tomar el punto medio del segmento **ST**.
18.	Sobre la recta r marcamos dos puntos de forma tal que **A** sea su punto medio (Lo hacemos intersecando una circunferencia con centro en **A** y la recta **r**) Luego trazamos la mediatriz del segmento que tiene por extremos los dos puntos

7.





19.	Trazamos la mediatriz del segmento **PQ**, llamemos **M** a su punto medio. Trazamos las mediatrices de los segmentos **PM** y **MQ** y marcamos sus puntos de intersección con el segmento.
20.	Unimos **A** y **B** con un segmento y trazamos su mediatriz. Marcamos el punto **C** intersección entre la mediatriz y la recta **r**. Nos queda determinado el triángulo **ABC**
21.	Para trazar las mediatrices seguimos las indicaciones dadas en la actividad anterior El punto de intersección de las tres mediatrices es interior en los triángulos acutángulos y rectángulos y exterior para los obtusángulos.
22.	**a)** V **b)** V **c)** F **d)** F
23.	Trazamos dos ángulos congruentes con centro **O** y que ambos tengan la semirrecta **OB** como lado común.
24.	Trazamos la bisectriz del ángulo **α** y luego las bisectrices de los dos ángulos congruentes determinados por la bisectriz.
25.	**a)** Trazamos un segmento y luego su mediatriz, está determina 4 ángulos rectos. **b)** Trazamos la bisectriz a un ángulo recto. **c)** Trazamos un triángulo equilátero cualquiera de sus ángulos mide 60º.
26.	**a)** Cualquier circunferencia con centro en la mediatriz de $\overline{AB}$, que pase por **A** y **B**. **b)** No es posible, porque las mediatrices de los segmentos se cortan en un único punto, por lo tanto hay un único punto que equidista de **P**, **Q** y **R**, siendo el centro de la única circunferencia que pasa por dichos puntos.
27.	Trazamos una recta que pase por **M** y **N**. Luego trazamos otra recta que pase por **A** y **B**. El punto de intersección **P** de las dos rectas es el vértice del ángulo **α.** Trazamos un ángulo congruente al ángulo **BPM** con vértice en **P** y uno de sus lados es la semirrecta **PB**.
28.	**a)** Trazamos una circunferencia de centro A y radio la medida del segmento dado. Marcamos con una cruz todos los puntos en los que la circunferencia interseca a la curva. **b)** Coloreamos de rojo todos los puntos interiores a la curva que son interiores a la circunferencia. **c)** Coloreamos de azul todos los puntos exteriores a la circunferencia y interiores a la curva.
29.	Para completar el paralelogramo podemos prolongar la parte que se ve de los lados y de la diagonal. Trazamos un triángulo congruente haciendo que la diagonal sea un lado común a los dos triángulos. Para completar el rombo prolongamos los tramos de lados que se ven. Queda determinado un lado, como los lados de un rombo son congruentes haciendo centro en los vértices y con radio igual a la medida del lado marcamos lo extremos de los otros dos lados. Unimos estos puntos.
30.	**a)** **A** y **B** deben estar sobre la circunferencia y sobre un diámetro. **b)** elegimos un punto **A** cualquiera. Transportamos el segmento de manera que su otro extremo pertenezca a la circunferencia ese punto es **C**. **c)** Es imposible porque la mayor distancia a la que pueden encontrarse dos puntos de una circunferencia es la medida de su diámetro que es dos veces el radio.

31.	Trazamos la mediatriz del segmento dado. Luego trazamos la mediatriz de una de las mitades y marcamos el punto **P** de intersección con el segmento. El segmento que buscamos tiene como extremos el extremo del segmento original más distante de **P** y el punto **P**.
32.	**a)** Trazamos la bisectriz del ángulo **ABC**. Sobre la bisectriz con extremo en **B** transportamos el segmento **BA.** Marcamos el punto **P**. Unimos **A** con **P**. b) Trazamos la bisectriz del ángulo **ABC**. Trazamos la mediatriz del segmento **AB**. El punto de intersección de la bisectriz y la mediatriz es el punto **P**.
33.	Trazamos un ángulo congruente al ángulo **MNA** de manera que $\overrightarrow{NA}$ sea bisectriz del ángulo formado por los dos ángulos congruentes. Trazamos un ángulo congruente al ángulo **NMA** haciendo que $\overrightarrow{MA}$ sea bisectriz. El punto de intersección de las dos semirrectas trazadas es el punto **O**.
34.	**a)** Trazamos los segmentos **AC** y **BD** que son las diagonales del rectángulo. El punto de intersección es el centro de la circunferencia y su radio es la medida de la mitad de una de sus diagonales. **b)** No es posible porque las diagonales no son congruentes.
35.	**a) i**. **H** es la intersección entre la recta **r** y la mediatriz del segmento **AB** **ii.** No existe **iii.** El punto **H** es la intersección entre la recta **r** y la mediatriz del segmento **AB**. **iv**. Cualquier punto que pertenece a la recta **r** pues esta es la mediatriz del segmento **AB**. **b)** Ver al pie de la tabla.
36.	$\overline{CG}$ y $\overline{BH}$.
37.	Los puentes en los puntos de intersección de la recta r y las perpendiculares a **T**,**P** y **M**. El hospital en el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos **TP**, **PM** y **MT**. La estación de bomberos en la intersección de la mediatriz del segmento **PM** y la recta **r**.
38.	El hospital se debe marcar en la intersección de la bisectriz del ángulo **ABC** y la mediatriz del segmento **BC**.

35. b

	I	II	III	IV
HAY UN ÚNICO PUNTO	X		X	
NO HAY PUNTOS		X		
HAY MÁS DE UN PUNTO				X

